EUROPA LEHRMITTEL

Edition Harri Deutsch

Quantenmechanik

Symmetrien

von

Walter Greiner
Berndt Müller

5., korrigierte Auflage

VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL · Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG
Düsselberger Straße 23 · 42781 Haan-Gruiten

Europa-Nr.: 56382

I Symmetrien in der Quantenmechanik

1 Symmetrien in der klassischen Physik

Symmetrien spielen in der Physik eine fundamentale Rolle. Die Kenntnis der Symmetrien in gegebenen Problemen vereinfacht deren Lösung oft beträchtlich. Wir verdeutlichen dies an drei wichtigen Beispielen aus der *klassischen Physik*.

Homogenität des Raumes

Wir nehmen an, dass der Raum *homogen* sei, d. h. an allen Orten $\vec{r}$ die gleiche Struktur habe. Das ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Lösung eines gegebenen physikalischen Problems invariant unter Translationen ist, weil in diesem Fall die Umgebung eines beliebigen Punktes durch eine Verschiebung einer ähnlichen Umgebung irgendeines anderen Punktes hervorgehen muss (siehe Abb. 1.1).

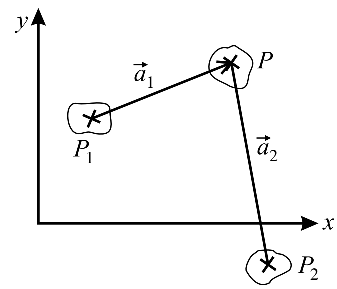

Abb. 1.1 Homogenität oder Translationsinvarianz des Raumes bedeutet, dass die Umgebung von P aus der irgendeines anderen Punktes (z. B. $P_1, P_2, \ldots$) durch Verschiebungen ($\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots$) hervorgeht.

Diese Translationsinvarianz impliziert nun die Erhaltung des Impulses für ein abgeschlossenes System. Wir definieren hier die Homogenität des Raumes wie folgt, dass sich die Lagrange-Funktion $L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$ eines Teilchensystems nicht ändert, wenn die Teilchenkoordinaten $\vec{r}_i$ durch $\vec{r}_i + \vec{a}$ bei willkürlichem konstantem $\vec{a}$ ersetzt werden. (Ein allgemeineres Konzept der *Homogenität des Raumes* würde nur die Invarianz der Bewegungsgleichungen unter räumlichen Translationen erfordern. In diesem Fall kann wiederum die Existenz einer Erhaltungsgröße gefolgert werden, aber diese ist nicht notwendig gleich dem kanonischen Impuls. Eine ausführliche Diskussion dieses Aspekts findet man in Beispiel 1.1 und Aufgabe 1.4.) Daher muss

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{a} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \tag{1.1}$$

gelten. Weil $\vec{a}$ beliebig gewählt werden kann, folgt daraus

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 = \left\{ \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial y_i}, \sum_i \frac{\partial L}{\partial z_i} \right\} . \tag{1.2}$$

wobei $\vec{p} = \vec{p}_0 + \delta\vec{\phi} \times \vec{p}_0$ der gedrehte Impuls ist, vgl. (1.11). Außerdem gilt $|\vec{p}| = |\vec{p}_0|$, wie man aus (5.4) erkennt. Die gedrehte Welle $\chi_{\vec{p}}(\vec{r},t)$ gehört wie $\psi_{\vec{p}_0}$ zum Satz der linear unabhängigen ebenen Wellen und lässt sich also nicht durch eine Linearkombination anderer ebener Wellen darstellen. Alle Wellen $\chi_{\vec{p}}$ sind daher entartet, falls $\hat{U}_{\mathrm{R}}(\delta\vec{\phi})$ mit dem Hamilton-Operator kommutiert und $\psi_{\vec{p}_0}(\vec{r},t)$ ein Eigenzustand des Hamilton-Operators ist. Das ist offensichtlich, weil die Energie eines Teilchens nur vom Quadrat des Impulses abhängt und nicht von seiner Richtung.

Schlussfolgerung: Die vorgeführten Überlegungen sind dann interessant, wenn es *zwei Operatoren $\hat{S}$ und $\hat{A}$ gibt, die mit $\hat{H}$ kommutieren, aber nicht miteinander*, d. h.

$$[\hat{H},\hat{S}]_- = [\hat{H},\hat{A}]_- = 0, \quad [\hat{A},\hat{S}]_- \neq 0.$$

Ist ψ_α ein Eigenvektor von $\hat{A}$ und $\hat{H}$, so ist ψ_α *nicht* Eigenvektor von $\hat{S}$, d. h. $\psi_\alpha(\vec{r},t)$ und $\hat{S}\psi_\alpha$ sind linear unabhängig. In unserem obigen Beispiel ist dies erfüllt: $\hat{A}$ ist der Impulsoperator und $\hat{S}$ der Drehimpulsoperator.

Matrixelemente räumlich verschobener Zustände

Beispiel 5.1

Wir betrachten das Matrixelement eines Operators $\hat{A}$ zwischen verschobenen Zuständen

$$\langle \psi_{\alpha'}(\vec{r},t)|\hat{A}|\psi_{\beta'}(\vec{r},t)\rangle = \langle \psi_\alpha(\vec{r},t)|\hat{U}_{\mathrm{r}}^\dagger(\vec{\rho})\hat{A}\hat{U}_{\mathrm{r}}(\vec{\rho})|\psi_\beta(\vec{r},t)\rangle. \tag{1}$$

Wenn $\hat{A} = \hat{A}(\hat{\vec{p}})$, d. h. $\hat{A}$ eine Funktion des Impulsoperators ist, so kann der verschobene Operator geschrieben werden als

$$\hat{U}_{\mathrm{r}}^\dagger(\vec{\rho})\hat{A}(\hat{\vec{p}})\hat{U}_{\mathrm{r}} = \hat{A}(\hat{\vec{p}})\hat{U}_{\mathrm{r}}^\dagger\hat{U}_{\mathrm{r}} = \hat{A}(\hat{\vec{p}}),$$

d. h. die Matrixelemente von $\hat{A}$ zwischen verschobenenen und nichtverschobenen Zuständen sind alle gleich. Falls jedoch $\hat{A} = \hat{A}(\vec{r})$ eine Funktion des Ortes ist, so folgt mit (1), dass

$$\begin{aligned}\hat{U}_r^\dagger(\vec{\rho})\hat{A}(\vec{r})\hat{U}_{\mathrm{r}}(\vec{\rho}) &= \exp\left(+\frac{\mathrm{i}\vec{\rho}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\right)\hat{A}(\vec{r})\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\vec{\rho}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\right)\\ &= \hat{A}(\vec{r}+\vec{\rho}).\end{aligned}$$

Dies wird in den Aufgaben 5.1 und 5.2 bewiesen. Daher sind die Matrixelemente von $\hat{A}(\vec{r})$ zwischen verschobenen Zuständen gleich den Matrixelementen zwischen den nichtverschobenen Zuständen, gebildet mit dem verschobenen Operator $\hat{A}'(\vec{r}) = \hat{A}(\vec{r}+\vec{\rho})$.

Beispiel 5.1

Die Relation $(\mathrm{i}\hat{p}/\hbar)^n\hat{B}(x)$ und Transformationsoperatoren

Aufgabe 5.1

Problemstellung:

Beweisen Sie, dass die Relation

$$\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^n\hat{B}(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{\partial^\nu\hat{\vec{B}}}{\partial x^\nu}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{p}\right)^{n-\nu} \tag{1}$$

21 Algebraische Begriffe: Invariante Untergruppen, einfache und halbeinfache Lie-Gruppen, Normalteiler, Ideale

Lie-Gruppen, die in der Physik eine spezielle Bedeutung haben, sind *halbeinfach*. Dieser Begriff und der Grund für diese besondere Wertschätzung soll im Folgenden erläutert werden. Betrachten wir eine Gruppe $g = \{\hat{g}_\nu\}$ mit einer *Abel'schen* Untergruppe $a = \{\hat{a}_i\}$ (siehe Abb. 21.1). Wenn

$$\hat{g}_\nu \hat{a}_i \hat{g}_\nu^{-1} = \hat{a}_j, \tag{21.1}$$

$$\hat{a}_i \hat{a}_k = \hat{a}_k \hat{a}_i \tag{21.2}$$

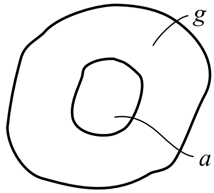

Abb. 21.1 Die Gruppe *g* und ihre Abel'sche Untergruppe *a*.

für jedes $\hat{a}_i$ und für jedes Element $\hat{g}_\nu$ aus der vollen Gruppe gelten, d. h. wenn auch $\hat{g}_\nu \hat{a}_i \hat{g}_\nu^{-1}$ wieder ein Element der Abel'schen Untergruppe ist, so nennt man die Gruppe a eine *Abel'sche invariante Untergruppe* oder einen *Abel'schen Normalteiler*. Ist die Untergruppe a nur invariant, aber nicht Abel'sch, d. h. gilt nur (21.1), aber nicht (21.2), so wird sie als *invariante Untergruppe* oder als *Normalteiler* bezeichnet.

Translations-Rotations-Gruppe

Beispiel 21.1

Die Gruppe aller Translationen und Rotationen hat sechs Generatoren $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$, $\hat{p}_3$, $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$, $\hat{J}_3$. Sie heißt kurz *Translations-Rotations-Gruppe* und enthält die Translationen $(\hat{p}_\nu)$ als eine Abel'sche Untergruppe. Schon die Anschauung zeigt, dass

$$\hat{R}\hat{T}\hat{R}^{-1} = \hat{T}',$$

wobei $\hat{R}$ eine Rotation und $\hat{T}$ eine Translation bezeichnet, wieder eine reine Translation $\hat{T}'$ ist (siehe Abb. 21.2). Somit ist die Translationsgruppe eine invariante Abel'sche Untergruppe der Translations-Rotations-Gruppe. Diese Eigenschaft wird in Aufgabe 31.4 auch noch analytisch untersucht werden.

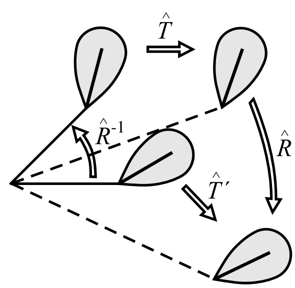

Abb. 21.2 Rotationen und Translationen.

Beispiel 21.1

Wir kommen nun zur Definition von einfachen und halbeinfachen Lie-Gruppen. Eine Lie-Gruppe heißt *einfach*, wenn sie *keine kontinuierliche invariante Untergruppe* (also vom Lie-Typ) bzw. *keinen kontinuierlichen (Lie'schen) Normalteiler* besitzt. Eine Lie-Gruppe heißt *halbeinfach*, wenn sie *keinen kontinuierlichen Abel'schen Normalteiler*, d. h. keine Abel'sche invariante Untergruppe enthält. Man beachte: Eine halbeinfache Gruppe kann sehr wohl eine kontinuierliche invariante Untergruppe besitzen; sie darf lediglich keine kontinuierliche Abel'sche invariante Untergruppe haben.

hängt aber nicht von der Quantenzahl T_3 ab, die ja die Zustände dieses Multipletts unterscheidet. Damit erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}&\langle T(1)T_3(1);\ T(2)T_3(2)|\hat{S}|TT_3\rangle\\&\quad=(T(1)T(2)T|T_3(1)T_3(2)T_3)\langle T||\hat{S}||T\rangle.\end{aligned}\tag{40.7}$$

Wigner, E. (1902–1995) → unten
Eckart, C. (1902–1973) → unten

Die Gleichungen (40.6) und (40.7) sind ein Spezialfall des sogenannten *Wigner-Eckart-Theorems.*[1] Die Folgerung aus (40.7) ist: Da die Übergangswahrscheinlichkeiten proportional zum Quadrat des Matrixelements auf der linken Seite von (40.7), d. h. proportional zu

$$\begin{aligned}&|\langle T(1)T_3(1);\ T(2)T_3(2)|\hat{S}|TT_3\rangle|^2\\&\quad=|(T(1)T(2)T|T_3(1)T_3(2)T_3)|^2|\langle T||\hat{S}||T\rangle|^2\end{aligned}\tag{40.8}$$

sind, werden die Intensitätsverteilungen für die verschiedenen möglichen Ladungskombinationen im Endzustand $|T(1)T_3(1);\ T(2)T_3(2)\rangle$ durch Quadrate von Clebsch-Gordan-Koeffizienten gegeben. Mit anderen Worten: Bildet man Verzweigungsverhältnisse von zwei möglichen Zerfallsmoden, so fällt das im Allgemeinen unbekannte reduzierte Matrixelement heraus. Dieser Fakt erlaubt – trotz des Fehlens einer vollständigen dynamischen Theorie der Starken Wechselwirkung – quantitative Voraussagen zu machen, die durch Messungen überprüft werden können.

Das Wigner-Eckart-Theorem

Beispiel 40.1

Gleichung (40.6) ist ein Spezialfall des Wigner-Eckart-Theorems. Wir wollen hier das allgemeine Theorem vorstellen und beweisen. Es gilt für eine allgemeine Klasse von Tensoroperatoren, die über ihre Kommutationsrelationen mit den Drehimpulsoperatoren bzw. den Isospin-Operatoren definiert sind.

---

[1] Siehe Monographien über Drehimpulsalgebra, z. B. M. E. Rose: *Elementary Theory of Angular Momentum* (Wiley, New York, 1957).

EUGENE PAUL WIGNER

⋆ 17.11.1902 in Budapest, † 1.1.1995 in Princeton, New Jersey, USA; Wigner war seit 1938 Professor in Princeton, erhielt 1963 zusammen mit H.D. Jensen und Maria Göppert-Mayer den Nobelpreis zur Theorie des Atomkerns und der Elementarteilchen, insbesondere für die Entdeckung und Anwendung fundamentaler Symmetrie-Prinzipien. Nach seiner Emeritierung in Princeton nahm er ein distinguished professorship an der Universität von Louisiana in Baton Rouge/Louisiana an.

CARL HENRY ECKART

⋆ 1902 in St. Louis, † 1973 in La Jolla; Eckart war 1928-46 Professor in Chicago, danach bis 1970 in San Diego tätig. Neben Arbeiten zur theoretischen Physik veröffentlichte Eckart zahlreiche Beiträge zur Ozeanographie.