Wolfgang Schlottke

Rund um den Satz des Pythagoras

Lernen an Stationen und
weiterführende Aufgaben
für den Mathematikunterricht

Auer Verlag GmbH

3

Sarogahtyp – Pythagoras rückwärts

Die Umkehrung des Satzes des Pythagoras (1)

Du brauchst:
- ✓ „Köpfchen“
- ✓ ein zweites helles Köpfchen

An dieser Station geht es darum, die beiden Aussagen, die im Satz des Pythagoras enthalten sind, auszutauschen. Es wäre nicht schlecht, wenn du den Satz des Pythagoras schon kennen würdest.

Arbeitsschritte

1. Der Satz des Pythagoras besteht aus zwei Teilen, Sätzen oder auch Aussagen, wie die Mathematiker sagen. Es geht um eine **Bedingung (Aussage) A** und eine daraus **ableitbare Folge B**, z. B. beim Satz des Pythagoras:

   (1) Aussage A: Wenn ein __________ ________________ ist (Hypotenuse c), dann gilt:

   Folge B: __________ $+$ __________ $=$ __________

   Man sagt auch kurz: **Aus A folgt B**, im Zeichen: **A $\Rightarrow$ B**

   1. Tipp

2. Wie sieht das jetzt praktisch in der Umkehrung aus? Mache dir ein paar Minuten Gedanken darüber. Diskutiere mit deinem Partner, erst dann weiterlesen!

   (2) Aussage B: Wenn in einem Dreieck gilt: _____ $+$ _____ $=$ _______ , dann folgt

   Folge A: Das _______________ _____ ____________________ .

   2. Tipp

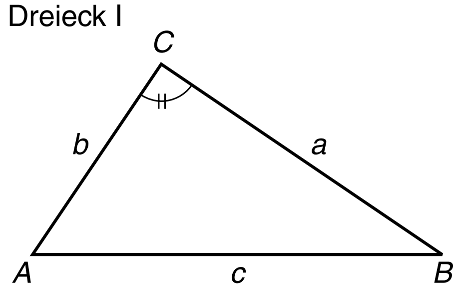
3. Halte dich bei der Beantwortung des vorigen Lückentextes eng an den Absatz (1). Wir benutzen hier eine für dich vielleicht neue Methode, den **„indirekten Beweis“**. Das klingt möglicherweise geheimnisvoll, ist es aber nicht.

   Diese indirekte Methode bedient sich eines kleinen Tricks. Sie nimmt an, dass die letzte Aussage A aus (2) falsch ist. Schau noch einmal hin! Dann versucht man mit logischen Gedanken nachzuweisen, dass das nicht wahr sein kann.

4. Wir machen das jetzt ganz konkret. Also: Gibt es vielleicht **ein Dreieck**, das **nicht rechtwinklig** ist und in dem **doch der Satz des Pythagoras gilt**?

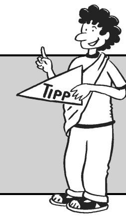
   Wir nehmen an, wir hätten solch ein Dreieck I gefunden, in dem der Satz des Pythagoras gilt, und dieses Dreieck ist nicht rechtwinklig (das ist die falsche Aussage A aus (2)). Wir zeichnen dieses Dreieck I mit den Eckpunkten ABC, in dem γ nicht 90° ist.

Dreieck I



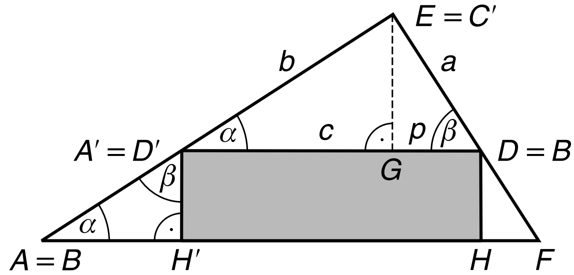
Ergänzen, Verschieben, Wegnehmen mit Fantasie

Tipp-Blatt (2)



5. Tipp

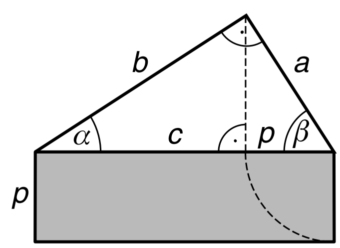
Dieses Dreieck $\triangle\, BHD$ verschiebst du entlang der Strecke $\overline{AF}$, bis B auf A liegt. Aus A' wird zugleich D'. H' liegt auf $\overline{AH}$.



6. Tipp

Die beiden Dreiecke $\triangle\, GDE$ und $\triangle\, BH'D'$ sind kongruent nach dem Kongruenzsatz WSW.

1. $\overline{ED} = \overline{BD}$ gleiche Seiten des alten Quadrats
2. $\measuredangle\ A'AH' = \alpha$ Stufenwinkel zu $\measuredangle\, EA'D$. Daraus folgt:
3. $\measuredangle\ H'A'A = \beta$, denn $\alpha + \beta = 90°$
4. $\measuredangle\ EDA' = \beta$, da $\alpha + \beta = 90°$ und $\measuredangle\, A'DE$ rechtwinklig ist
5. $\measuredangle\ DEG = \alpha$



7. Tipp

Die Strecke $\overline{DH}$ ist gleich p, dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt zur Kathete a. Damit hast du den **Kathetensatz des Euklid** bewiesen:

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das *Quadrat* über einer *Kathete* gleich dem *Rechteck* aus der *Hypotenuse c* und dem *zugehörigen Hypotenusenabschnitt*, als Gleichung:

$$\boxed{a^2 = c \cdot p}$$

Aufgabe 2

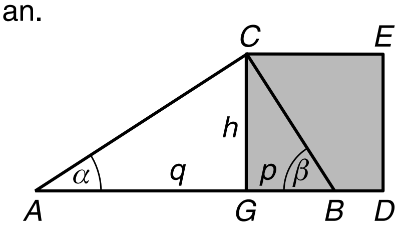
8. Tipp

Du zeichnest an das Quadrat anschließend die Seite q in Verlängerung der unteren Quadratseite $\overline{GD}$. Damit hättest du Punkt A.

Im Punkt C trägst du an $\overline{AC}$ einen rechten Winkel an.

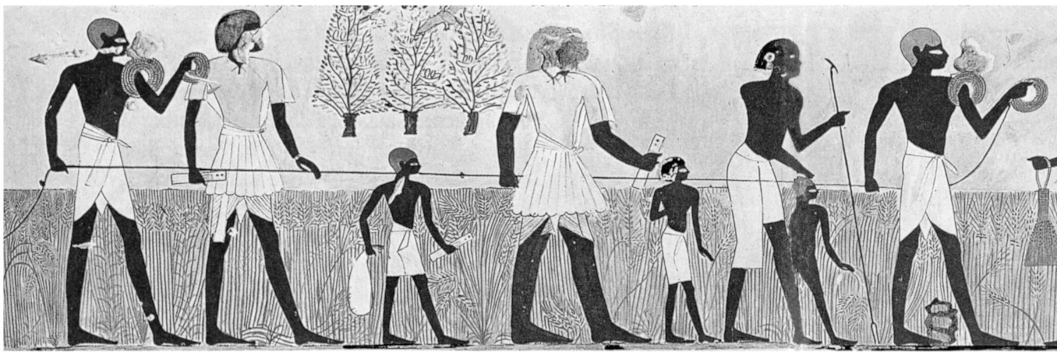
Der Punkt B liegt

1. in der Verlängerung von q
2. auf dem freien Schenkel des angetragenen rechten Winkels.



1 Mit Knoten zum rechten Winkel

Die Herstellung eines rechten Winkels war von jeher eine zentrale Anforderung an alle Kulturen. Und so ist es nicht verwunderlich, dass wir in vielen alten Kulturen Methoden finden, die sich mit diesem Problem beschäftigen. So wissen wir z. B. aus dem alten Ägypten, dass Landvermesser mit Hilfe eines „Knotenseils" die Felder der Nilbauern nach der jährlichen Überschwemmung neu einmessen mussten. Das war eine ganz wichtige Aufgabe, um dem Betrug vorzubeugen. Dieses Knotenseil hatte 12 Knoten in gleichmäßigen Abständen und war geschlossen, d. h. Anfang und Ende waren zusammengefügt.



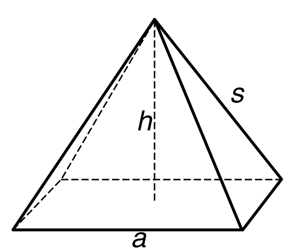
Du kannst ja mal versuchen, ein solches Seil herzustellen. Das ist recht mühsam, wenn man genau sein will. Mit einem Bindfaden, auf dem du 12 Markierungen angebracht hast, geht es auch, ebenso wie mit Streichhölzern. Versuche, mit diesen Materialien einen rechten Winkel herzustellen, so dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht.

Übrigens verwendeten die Inder ein Seil mit 30 Knoten. Hatte das einen Vorteil? Probiere einfach ein bisschen! Solltest du an einer Baugrube vorbeikommen, in der die zukünftigen Mauern schon abgesteckt sind, so siehst du häufig Dreiecke aus Holzlatten an den Ecken des Baus stehen, wo dann die Eckmauern errichtet werden. Frag mal die Bauleute danach – das sind ganz praktische Menschen.

Zu Beginn des Textes hast du vielleicht an den Thaleskreis gedacht (wenn du ihn schon kennst), um einen rechten Winkel herzustellen. Wir wollen hier aber einen anderen Weg gehen. Wenn du die beiden rechtwinkligen Dreiecke mit dem 12er- bzw. 30er-Knotenseil gefunden hast, so denk doch mal über die Länge der Seiten der Dreiecke nach.

2 Von Ägypten nach Köln

Die Cheopspyramide in der Nähe von Kairo gehört zu den sieben Weltwundern des Altertums. Sie ist das Grab eines Pharaos. Früher war eine Seite ihrer Grundfläche $a = 233$ m lang und eine Körperkante $s = 221$ m [1]. Der Kölner Dom ist rund 160 m hoch. Der Bau wurde 1248 begonnen und endgültig erst 1880 fertig gestellt.



So viel Zeit hatten die Ägypter natürlich nicht. Der Pharao wollte sein Grab fertig gestellt sehen, ehe er starb. Man glaubte an eine Bauzeit von 30 bis 40 Jahren. Kannst du berechnen, ob die Pyramide damals höher war als der Kölner Dom jetzt?

[1] Die Daten können je nach Quelle variieren!

17 Ein Autohafen für Herrn Opelo **Lösung**

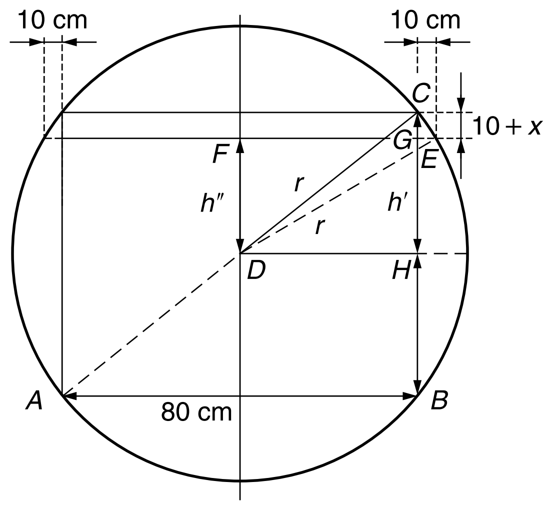
a) Die Länge der Dachbalken berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.

$l^2 = 5{,}8^2 + (2{,}50 - 2{,}10)^2 \qquad l^2 = 5{,}8^2 + 0{,}4^2 \qquad \boldsymbol{l = 5{,}81\,\mathrm{m}}$

Überrascht über die kleine Verlängerung von 1 cm?

b) $\boldsymbol{A}_{\mathbf{Rechteck}} = 2{,}5 \cdot 5{,}81\,\mathrm{m}^2 = \mathbf{14{,}53\,m^2}$

18 James Bond und der Roboter **Lösung**



1. **Berechnung von h'':** Dreieck $\triangle DEF$

Da $\overline{GE} = 10\,\mathrm{cm}$ sein soll, ist

$\overline{FE} = 50\,\mathrm{cm} \left(\frac{80}{2} + 10\,\mathrm{cm}\right)$ oder mehr.

$r^2 = h''^2 + \overline{FE}^2 \qquad h''^2 = 56^2 - 50^2$

$\boldsymbol{h'' = 25{,}22\,\mathrm{cm}}$

2. **Berechnung von h':** Dreieck $\triangle CDH$

$\overline{GC}$ muss mindestens 10 cm lang sein.

$r^2 = h'^2 + 40^2 \qquad h'^2 = r^2 - 40^2$

$h' = \sqrt{56^2 - 40^2} \qquad \boldsymbol{h' = 39{,}19\,\mathrm{cm}}$

$\overline{CG} = 39{,}19\,\mathrm{cm} - 25{,}22\,\mathrm{cm} = 13{,}97\,\mathrm{cm} > 10\,\mathrm{cm}$

Mit der Höhe klappt es also. Damit ist der Roboter höchstens
$l = \overline{BH} + \overline{HG} = h' + h'' = 39{,}19\,\mathrm{cm} + 25{,}22\,\mathrm{cm} = 64{,}41\,\mathrm{cm}$ hoch.

3. **Kontrolle der Rechengenauigkeit:**

Dreieck $\triangle ABC$

$80^2 + (2 \cdot 39{,}19)^2 = 112^2?$

$111{,}997 = 112$ Stimmt sehr gut!

19 Ganz schön spannend **Lösung**

Die Flanken der beiden Spannungskurven l_1 und l_2 haben die Maßeinheit V/ms, d. h.: Wie schnell steigt die Spannung U in der Zeit ms?

Beispiel 1:

$l_1^2 = U_{max}^2 + (t_1 - t_0)^2 \qquad l_2^2 = U_{max}^2 + (t_3 - t_2)^2$

$(t_1 - t_0)^2 = l_1^2 - U_{max}^2 = 25^2 - 22{,}5^2 \qquad (t_3 - t_2)^2 = l_2^2 - U_{max}^2 = 23^2 - 22{,}5^2$

$\boldsymbol{t_1 - t_0 = 10{,}9\,\mathrm{ms}} \qquad \boldsymbol{t_3 - t_2 = 4{,}8\,\mathrm{ms}}$

Beispiel 2:

$l_1^2 = U_{max}^2 + (t_1 - t_0)^2 \qquad l_2^2 = U_{max}^2 + (t_3 - t_2)^2$

$(t_1 - t_0)^2 = l_1^2 - U_{max}^2 = 23{,}9^2 - 23{,}3^2 \qquad (t_3 - t_2)^2 = l_2^2 - U_{max}^2 = 23{,}4^2 - 23{,}3^2$

$\boldsymbol{t_1 - t_0 = 5{,}3\,\mathrm{ms}} \qquad \boldsymbol{t_3 - t_2 = 2{,}2\,\mathrm{ms}}$